DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2009.04.002
西北大学学报(自然科学版)
2009年8月,第39卷第4期,Aug.,2009,Vol.39,No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

一个包含Smarandache函数的同余方程

巫朝霞[1],武 楠[2]

(1 新疆财经大学 应用数学学院,新疆 乌鲁木齐 830011;2 西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:目的 研究一个包含Smarandache函数$S(n)$同余方程的可解性。方法 利用初等方法及原根的性质。结果 证明了该同余方程有无穷多个正整数解。结论 给出了正整数n是该同余方程解的充分条件。

关 键 词:Smarandache函数;同余方程;正整数解;充分条件
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2009)04-0549-03

1 引言及结论

对任意正整数n,著名的F.Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$,即$S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$。这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中(参阅文献[1])引入的。从$S(n)$的定义易推出:如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准素幂分解式,那么$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。由此,亦不难计算出$S(n)$的前几个值为:$S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,$S(11)=11$,$S(12)=4$,$S(13)=13$,$S(14)=7$,$S(15)=5$,$S(16)=6$,…。关于$S(n)$及其有关函数的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[2-5]。例如,文献[5]研究了和式

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)} \tag{1}$$

为整数的问题,并证明了下面3个结论:

a) 当n为无平方因子数时,式(1)不可能是正整数。

b) 对任意奇素数p及任意正整数α,当$n=p^{\alpha}$且$\alpha\leqslant p$时,式(1)不可能是正整数。

c) 对于任意正整数n,当n的标准分解式为$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k$且$S(n)=p_k$时,式(1)不可能是正整数。

此外,文献[6]研究了$S(2^{p-1}(2^p-1))$的下界估计问题,并给出了估计式

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1。$$

其中p为任意奇素数。

对任意正整数$n>1$,考虑同余方程

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \mod n。\tag{2}$$

本文的主要目的是研究同余方程(2)的可解性。关于这一问题,至今在现有的文献中未见到。本文利用初等方法及其原根的性质研究了该问题,并证明了这一同余方程有无穷多个正整数解。同时,也给出了正整数n满足同余方程(2)的一个充分条件,证明了下面两个结论。

定理1 对任意正整数$n>1$,当$\mu(n)\neq 0$时,有同余式

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv\frac{n}{4}(1+(-1)^n)\mod n。$$

其中$\mu(n)$为Möbius函数。

定理2 设奇数$n>1$且标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$S(n)=S(p_j^{\alpha_j})=\alpha\cdot p_j$,其中$1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_j$,则$n$满足同余方程(2)的充分条件是对所有$i=1,2,\cdots,k$有$\varphi(p_i^{\alpha_i})$不整除$\alpha\cdot p_j$。

显然,当n为奇无平方因子数时,$\frac{n}{4}(1+(-

收稿日期:2009-03-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:巫朝霞,女,新疆乌鲁木齐人,从事基础数学研究。

$1)^{n})=0$,由定理 1立刻得到下面的推论。

推 论 对任意奇数 $n>1$且 $\mu(n)\neq 0$,有同余式

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod n.$$

显然,由定理 1可知同余方程(2)有无穷多个正整数解,即所有大于 1的奇无平方因子数都是同余方程(2)的解。结合定理 1及定理 2不难推出同余方程(2)没有偶数解。

2 定理的证明

利用初等方法及原根的性质来完成定理的证明。关于原根的存在性及其有关性质,可以参阅文献[7,8]。

首先证明定理 1。

设 $n>1$且 $\mu(n)\neq 0$,于是由 F. Smarandache函数的性质可设 $S(n)=S(p_1 p_2\cdots p_k)=p_k$。当 n为奇数时,对任意 p_i,$1\leqslant i\leqslant k$,设 g为模 p_i的原根,显然自然数 1,2,…,$n-1$中包含了模 p_i的 $\frac{n}{p_i}$个简化剩余系,于是由原根的性质可得

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}=1^{p_k}+2^{p_k}+3^{p_k}+\cdots+(n-2)^{p_k}+(n-1)^{p_k}\equiv \frac{n}{p_i}\left(g^{0\cdot p_k}+g^{p_k}+g^{2\cdot p_k}+\cdots+g^{(p_i-2)\cdot p_k}\right)\equiv \frac{n}{p_i}\,\frac{g^{(p_i-1)\cdot p_k}-1}{g^{p_k}-1} \bmod p_i. \tag{3}$$

因为 g为模 p_i的原根,所以 $g^{p_i-1}\equiv 1 \bmod p_i$,从而推出 $g^{(p_i-1)\cdot p_k}\equiv 1 \bmod p_i$,而 $(p_k, p_i-1)=1$,所以 $(g^{p_k}-1, p_i)=1$,因此有

$$\frac{g^{(p_i-1)\cdot p_k}-1}{g^{p_k}-1}\equiv 0 \bmod p_i. \tag{4}$$

结合同余式(3)及(4)立刻得到

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod p_i. \tag{5}$$

注意到 $p_1, p_2, \cdots, p_k$两两互素,且每个 p_i均整除 $1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}$,所以由式(5)知乘积 $p_1\cdot p_2\cdots p_k=n$也整除 $1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}$,即

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod n.$$

于是证明了当 n为奇无平方因子数时,定理 1成立。

当 n为偶无平方因子数时,由前面的证明过程可知若 p_i为 n的奇素因子时,式(5)仍然成立,所以易推出同余式

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod \frac{1}{2}n. \tag{6}$$

同时也易验证

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 1 \bmod 2. \tag{7}$$

注意到 $(2, \frac{1}{2}\cdot n)=1$,结合式(6),(7)不难推出

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv \frac{1}{2}\cdot n\equiv \frac{n}{4}\left(1+(-1)^{n}\right) \bmod n.$$

于是完成了定理 1的证明。

现在证明定理 2。

设奇数 $n>1$且标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$S(n)=S(p_j^{\alpha_j})=\alpha\cdot p_j$,其中 $1\leqslant \alpha\leqslant \alpha_j$。对任意 $1\leqslant i\leqslant k$,根据原根存在定理可知 $p_i^{\alpha_i}$存在原根,设 g为模 $p_i^{\alpha_i}$的任一原根,显然自然数 1,2,3,…,$n-1$中恰好包含模 $p_i^{\alpha_i}$的 $\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$个简化剩余系,从而由原根的性质知

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}=1^{\alpha\cdot p_j}+2^{\alpha\cdot p_j}+3^{\alpha\cdot p_j}+\cdots+(n-1)^{\alpha\cdot p_j}\equiv \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\left(g^{0\cdot\alpha\cdot p_j}+g^{\alpha\cdot p_j}+g^{2\cdot\alpha\cdot p_j}+\cdots+g^{(\varphi(p_i^{\alpha_i})-1)\cdot\alpha\cdot p_j}\right)\equiv \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\,\frac{g^{\varphi(p_i^{\alpha_i})\alpha\cdot p_j}-1}{g^{\alpha\cdot p_j}-1} \bmod p_i^{\alpha_i}. \tag{8}$$

因为 g为模 $p_i^{\alpha_i}$的原根且 $\varphi(p_i^{\alpha_i})$不整除 $\alpha\cdot p_j$,所以 $p_i^{\alpha_i}$不整除 $g^{\alpha\cdot p_j}-1$,从而 $(g^{\alpha\cdot p_j}-1, p_i^{\alpha_i})=1$。所以,由式(8)并注意到 $g^{\varphi(p_i^{\alpha_i})\alpha\cdot p_j}-1\equiv 0 \bmod p_i^{\alpha_i}$立刻得到

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod p_i^{\alpha_i}. \tag{9}$$

显然 $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}$两两互素,所以由式(9)及整除的性质知

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0 \bmod n.$$

于是完成了定理 2的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] LU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[3] 乐茂华. 关于 Smarandache函数的一个猜想[J]. 黑龙

江大学学报: 自然科学版, 2007, 24(5): 687-688.
[4] 朱伟义. 原数函数 $S_p(kn)$与 Riemann Zeta函数的关系[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2007, 37(3): 345-347.
[5] 杜凤英. 关于 Smarandache函数 S(n)的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.
[6] LE Mo-hua. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1-3): 217-218.
[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.
[8] APOSTOL T M. Introduction to Analytical Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

(编　辑　亢小玉)

A congruent equation involving the Smarandache function

WU Zhao-xia[1], WU Nan[2]

(1. School of Applied Mathematics, Xinjiang University of Finance and Economics, Wulumuqi 830011, China; 2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: Aim　To study the solvability of a congruent equation involving the Smarandache function. Methods　Using the elementary method and the properties of the primitive roots. Results　Proved that the congruent equation has infinite positive integer solutions. Conclusion　A sufficient condition is given for positive integer n satisfying the congruent equation.

Key words: Smarandache function; congruent equation; positive integer solution; sufficient condition

·学术动态·

我校学报国际传播影响力日益扩大

我校学报编辑部近年来利用各种媒介, 特别是网络传播方式, 使文、理两种学报的国际传播数量和范围迅速扩大, 单纯网络传播数量扩张比 2000年增长了近四倍。通过图书国际交流渠道订阅或交流至 100多个国家和地区 (每期 400余册)。被引频次和影响因子: 理科学报在综合性大学自然科学学报的排名保持在 8—10名, 在武大、南大、天大、川大、浙大之前, 为教育部科技司评选的 52种精品科技期刊之一; 文科学报在 211大学人文社科学报中的排名保持在 11名左右, 在川大、兰大、山大之前, 蝉联三届全国百强学报。

理科学报自 1982年以来被美国 MR数据库摘评 540篇 (自 1982年入选该库以来, 至今仍被摘录者仅存西大、清华、上交大、西交大、同济等 5家), 自 1984年以来被美国 CA数据库摘录 844篇, 自 1991年以来被德国 ZMATH数据库摘录 324篇, 另被英国 ZR数据库、俄罗斯 AJ数据库 (几乎为全部收录)、美国汤姆森路透公司、英国《剑桥科学文摘》、加拿大国家研究委员会等机构收录。

目前, 通过自办独立网站、网络版和全文上网同方、万方、维普、龙源、台湾华艺 5个大型数据库等渠道, 仅每天通过龙源网访问社科版的读者就有 68人次, 估计文理学报总访问量至少在数百万次以上。截止 2009年 5月 5日, 文、理学报在全世界范围, 仅在自办网站和中国知网即被访问达 151万次以上 (中国知网 83万次)。其中仅 2008年在亚洲被访问 80万次, 在欧洲被访问 1.7万次, 在北美洲被访问 1 274次, 在大洋洲被访问 183次, 在非洲被访问 46次。其中, 哲学与人文、经济与管理科学、地球科学、化学与化工、生命科学、信息科学贡献了被访频次的半数以上。这些数据说明, 文、理学报已成为我校最强大的对外学术传播窗口。

(亢小玉)